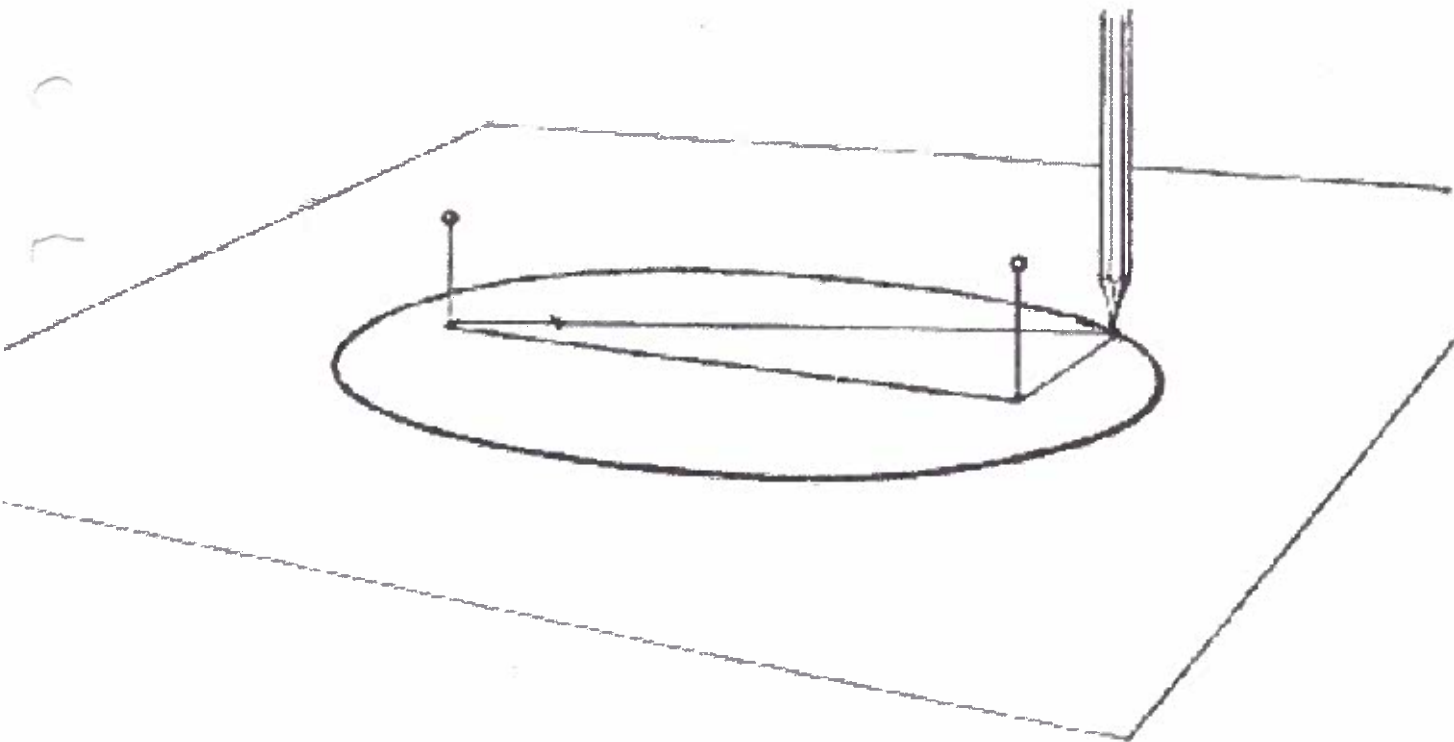


KÄGELSNITT, eller KONISKA SEKTIONER

(ett specialarbete av Per Erik Strandberg, Västerås, 1998)



"...hela världen fungerar ju så - som om den vore tänkt eller drömd av en gud som är matematiker. När molnen drar över himlen eller vågor slår mot stranden är det en räkneprocess som pågår, ett spelande med tal under sinnevärldens yta. Universum räknar fram banan för varje liten partikel i varje ögonblick, det räknar fram stjärnornas öden och livets historia, lekfullt men ändå kallt och likgiltigt, med en absolut, obönhörlig exakthet - så länge det inte finns ett medvetande som på ont eller gott ingriper i leken..."

Peter Nilson, död 1998, författare och matematiker, citat från "Rymdvaktaren"

1 INNEHÅLL

- 1 Innehåll (s 2)
- 2 Förord (s 3)
- 3 Historia (s 4)
- 4 Från kägelsnitt till tre definitioner (s 5)
 - 4.1 Konen, generatrisen, axeln och cirkeln (s 5)
 - 4.2 Ellipsens definition (s 5)
 - 4.3 Parabelns definition (s 6)
 - 4.4 Hyperbelns definition (s 7)
 - 4.5 Sammanfattning (s 7)
- 5 Från definition till ekvation (s 8)
 - 5.1 Ellipsens ekvation (s 8)
 - 5.2 Parabelns ekvation (s 9)
 - 5.3 Hyperbelns ekvation (s 10)
 - 5.4 Sammanfattning (s 11)
- 6 Mer om kägelsnitten:tangenter och specialfall (s 12)
 - 6.1 Ellipsens tangent (s 12)
 - 6.2 Parabelns tangent (s 13)
 - 6.3 Hyperbelns tangent (s 13)
 - 6.4 Hyperbelns asymptoter (s 14)
 - 6.5 Konjugathyperbeln (s 14)
 - 6.6 Sammanfattning (s 15)
- 7 Angående oändligheten och kägelsnitten (s 16)
- 8 Slutord (s 19)
- 9 Källhänvisning (s 20)

2 FÖRORD

Det är nu vår 1998, och på Rudbeckianska gymnasiet i Västerås gör samtliga avgångselever ett specialarbete. För min del var jag kluven inför valet av ämne. Det blev till slut "kägelsnitt", ett område inom matematiken som tillämpas en hel del inom fysiken. Både matematik och fysik är ämnen som färgat mig sedan barnsben. Från att försöka formulera teser om bensinsnålhet hos bilar "om bilen åker jättefort, hinner inte bensinen ta slut..." och andra tämligen naiva tankar så visade det sig på högstadiet att jag hade fallenhet för matematik. Jag kom vidare till final efter kvalificeringstävlingen i matematik SM för högstadieungdom 1993/1994. Från att ha letat efter kryphål i räknetabellerna i mellanstadiet (jag lärde mig dem aldrig utantill...), till matematik SM, ett ganska långt kliv. När jag sedan åkte som utbytesstudent till Frankrike var valet av program rätt enkelt, Scientifique option maths (Naturvetenskapligt med matematisk inriktning). Matematik är och kommer vara något som mitt liv förmodligen färgas ordentligt av, så det är ingen slump att jag har valt en liten fördjupning i detta ämne.

Jag stötte på detta kapitel första gången på matematikfördjupningen i Frankrike men då endast väldigt översiktligt och på väldigt kort tid. Därför ställde jag mig en hel del frågor som jag aldrig riktigt fick svar på. Det var främst oändlighetsproblem, om hur kurvorna skulle se ut om de korsades i oändligheten, och angående gränsfallen mellan ellips och parabel, och mellan parabel och ellips. Jag kommer ägna ett litet kapitel i slutet åt detta, om saker som inte står i vanliga matematikböcker eller lexikon.

Det är nog säkrast att jag nämner litet om mina beteckningar (på punkter, sträckor och liknande). När jag benämner två punkter F och F' , så menar jag inte att F' är ett resultat eller en derivata av F , utan att de hör ihop på ett eller annat sätt. I fallet med brännpunkter så är inte F' sekundär, utan lika grundläggande som F . Det är det faktum att man möter många symmetrier som gör att jag väljer detta skrivsätt och det är ett lämpligt sätt att inte förväxla två punkter.

Per Erik Strandberg, Västerås, april 21, 1998

3 HISTORIA

Omkring 200 år före det att vår tideräkning startar fanns en lärjunge till Arkimedes som hette Apollonius från Perga. Han hade ett intresse för geometri och beskrev ellipsens, parabelns och hyperbelns egenskaper. Han utgick från en cirkulär kon och skar den i olika vinklar. Beroende på hur man skar konen fick man en cirkel, en ellips, en hyperbel eller en parabel. Hans var systematisk i sitt arbete, och produkten blev "om koniska sektioner", ett verk omfattande åtta böcker.

(Det bör dock nämnas att både Euklides och Menaichmos, lärjunge till Platon, ägnade sig åt kägelsnitt. Euklides behandlade kägelsnitten i fyra böcker, som tyvärr försvunnit eller förstörts.)

Troligen var Apollonius inte ute efter några som helst tillämpningar av dessa koniska sektioner, utan ville bara leka lite med dem, och han anade nog aldrig att detta inom astronomin skulle ha en stor betydelse, trots att han var intresserad av även detta.

Mer än 1800 år senare, i början av 1600-talet, kom dessa idéer att leda till en stor upptäckt. Tysken Johannes Kepler läste Apollonius skrifter som kommenterats av muslimska vetenskapsmän för att tillämpas inom optiken, och med den enorma mängd observationsmaterial den danske astronomen Tycho Brahe hade samlat kom Kepler att rubba en hel del cirklar. Planeternas banor var inte riktigt cirkulära och med hjälp av Apollonius teorier om kägelsnitt drog Kepler slutsatsen att banorna ska beskrivas som ellipser och inte som cirklar.

Senare samma århundrade införde René Descartes och andra matematiker ett rätvinkligt koordinatsystem i kägelsnitten, detta gjorde att man kunde beskriva dessa geometriska figurer med siffror och bokstäver. I koordinatsystem kunde nu både kända och okända geometriska figurer enkelt ritas och analyseras med hjälp av andragradsekvationer.

På 1700-talet fortsatte Gottfried Wilhelm Leibniz och Isaac Newton i samma bana och utvecklade matematiken, även inom detta område, med hjälp av differential-, och integralkalkylen.

Nu, 1998, tillämpas detta främst inom fysiken (för fortsatta studier i matematik är kägelsnitten tämligen ointressanta), inom bland annat optiken, dynamiken (kastparablar) och astronomin.

4 FRÅN KÄGELSNITTET TILL TRE DEFINITIONER

4.1 Konen, generatriken, axeln och cirkeln

För att nu få lite inblick i definitionerna på ellipsen, hyperbeln och parabeln så börjar vi från början.

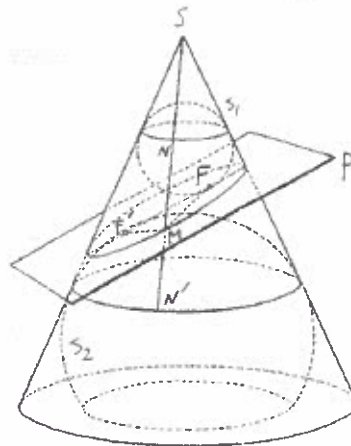
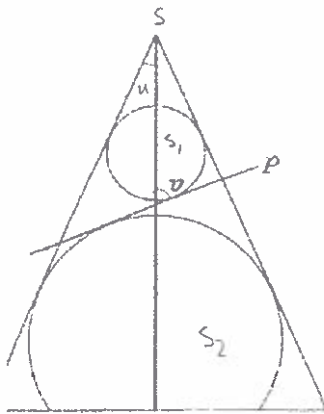
Om vi först tänker oss två raka, oändligt långa linjer som skär varandra i en punkt, punkten S. Vi kallar vinkeln mellan dem för u och låter den ena linjen rotera kring den andra med den konstanta vinkeln u . Den fasta linjen blir då figurens axel, och den roterande kallar vi för generatrik. Den skapar/genererar en konisk yta, som vi kan kalla K, med två mantelytor. Punkten S kallar vi ytans spets.

Vi låter nu ett plan P rätvinkligt skära axeln i en punkt som ej är S. Snittkurvan från den koniska ytan på planet är då en cirkel (vi får en radie som är $SM \cdot \sin(u) = \text{konstant}$, om M är en punkt på snittkurvan). Vi kan kalla (den minsta) vinkeln mellan axeln och planet v .

Vi ska nu se vad som händer om v inte är en rät vinkel...

4.2 Ellipsens definition

Om $v > u$ fås: P skär endast den ena mantelytan. Om P inte går genom S fås en snittfigur som inte är punktformad.



Vi tänker oss två sfärer, S_1 och S_2 , med mittpunkter på axeln, vi tänker oss dem så stora att de tangerar insidan av K och på ett sådant avstånd att de inte berör varandra. Tangeringsytorna mellan S_1 , S_2 och K är då två cirklar, med mittpunkter på axeln och vinkelräta till axeln. Vi tänker oss nu att P införs mellan S_1 och S_2 så att P tangerar S_1 i F och S_2 i F'. Vi betraktar nu en godtycklig punkt, M, på snittkurvan.

Vi tänker oss nu den generatrik som går genom M och döper de skärningspunkter i vilka generatriken tangerar S_1 och S_2 för N och N'.

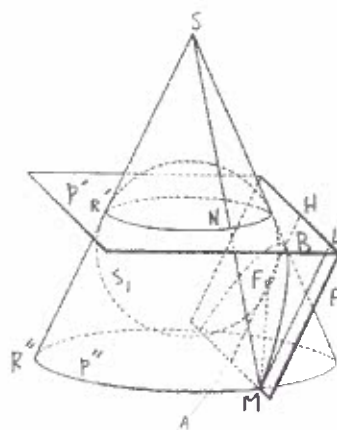
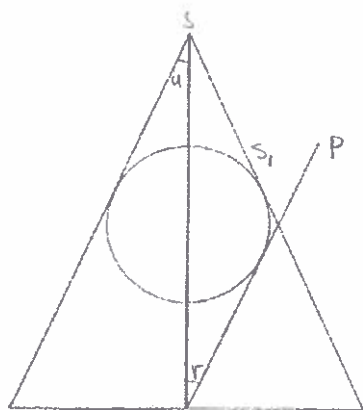
Vi inser att $FM = NM$ då de från en punkt dragna tangenterna till en sfär är lika långa.

På samma sätt inser vi att $F'M=N'M$,
alltså: $FM+F'M=NM+N'M=NN'$ ty N , M och N' ligger på samma
generatris (samma rät linje)
vi får: $FM+F'M=NN'=konstant$

Vi döper denna samling snittkurvor för vilka $v>u$ ellipser och
definierar:

En ellips är den geometriska orten för punkter vars avstånd
till två givna punkter, har en konstant summa.

4.3 Parabelns definition

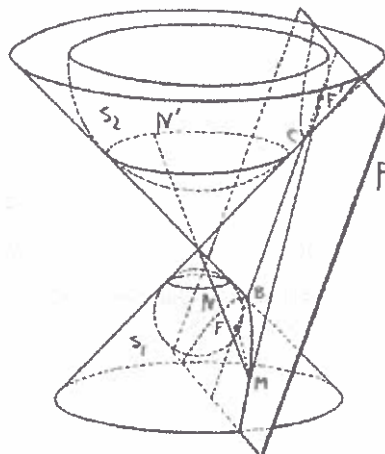
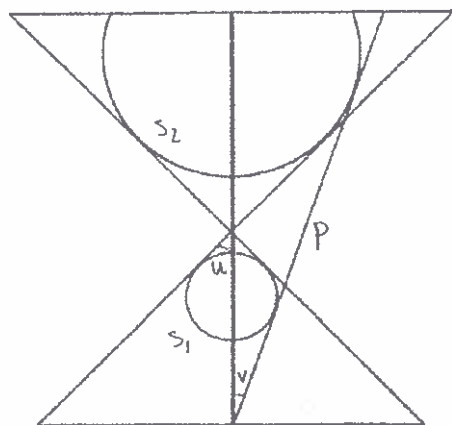


Om $v=u$ fås: Planet P skär ena mantelytan, om P inte skär K i S .
Det finns bara en inskriven sfär, S_1 , med mittpunkt i axeln,
och en tangeringspunkt mellan P och S_1 som vi kan kalla F . I
 S_1 's tangeringscirkel med K lägger vi planet P' . Axelns
skärningspunkt i P kallar vi A . Vi förlänger AF och får en
skärningspunkt i K : B och en med P' : H . Vi får en skärningsaxel
mellan P och P' . Vi kallar en godtycklig punkt på snittkurvan
på P från K för M . Vi skapar en punkt L så att den tillhör P
och P' , så att ML blir parallell mot AH , för alla L , (flyttar
vi på M flyttar vi också L). Vi drar generatrisen SM och linjen
 MF . SM skär P' och tangerar S_1 i punkten N . Vi inför ett till
plan P'' så att P'' är parallellt med P' och så att M tillhör
 P'' , alltså kan vi säga att P'' är i funktion av M . Vi drar
generatrisen som är parallell till P , den skär P' och P'' i R'
och R'' . Då får vi $MF=MN$ då detta är två tangenter från M till
 S_1 . Vi inser att $MN=R'R''$ då detta är delar av två parallellt
stympade generatriser. Och således, $R'R''=AH=ML$ ty parallella
linjer mellan parallella plan.

Alltså: $MF=ML$

Vi definierar denna samling snittkurvor, parablar så att:
En parabel är den geometriska orten för punkter vars avstånd
till en given punkt och en rät linje är lika.

4.4 Hyperbelns definition



Om $v < u$ fås: P skär båda mantelytorna.

Vi drar en linje, ett axelsnitt, genom P som är en, mot P, vinkelrät projicering av axeln. Axelsnittet skär snittkurvan på P i B och C. Vi inskriver två sfärer, S_1 och S_2 , i K, som tangerar P i F och F' . Vi kallar en godtycklig punkt på snittkurvan för M och drar den generatris som går genom M. Denna generatris skär tangeringscirkeln för sfärerna i N och N' .

Vi får: $MF = MN$ ty tangenter från samma punkt till samma sfär.

$MF' = MN'$ av samma anledning

alltså: $MF' - MF = MN' - MN = NN'$ ty M, N och N' tillhör samma generatris

och $NN' = \text{konstant}$

Vi kallar figuren på snittytan hyperbel och ger den definitionen:

En hyperbel är den geometriska orten för punkter som vars avstånd till två givna punkter har en differens som är konstant.

4.5 Sammanfattning

En ellips är den geometriska orten för punkter vars avstånd till två givna punkter, har en konstant summa.

En parabel är den geometriska orten för punkter vars avstånd till en given punkt och en rät linje är lika.

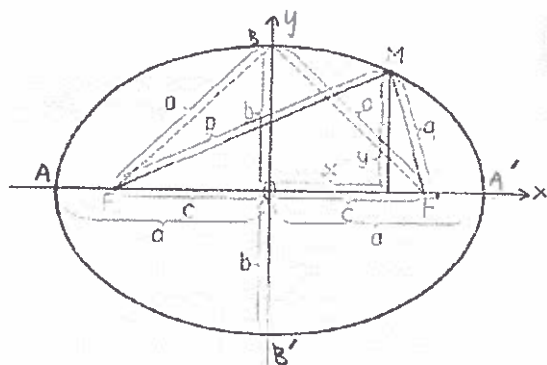
En hyperbel är den geometriska orten för punkter som vars avstånd till två givna punkter har en differens som är konstant.

Namnen är grekiska och Appolonius är upphovsmakaren till namnen ellips(underskott), parabel(överensstämmelse) och hyperbel(överskott).

5 FRÅN DEFINITION TILL EKVATION

5.1 Ellipsens ekvation

Ellipsens definition: En ellips är den geometriska orten för punkter (dessa punkter bildar ellipsen) vars avstånd till två givna punkter (brännpunkterna eller foci), har en konstant summa.



Vi inför lite benämningar för att lättare kunna arbeta med ellipsen:

Brännpunkterna döper vi F och F'. Vi döper mittpunkten till FF' för O. En godtycklig punkt i ellipsen kallar vi M. Vi döper brännpunktsradierna p och q så att $p=FM$, och $q=F'M$. Storaxeln eller transversalaxeln är den längsta linje som kan gå genom O, storaxeln går därför genom F och F', vi ger storaxeln längden $2a$, och kallar ändpunkterna A, och A', dessa ändpunkter kallas även ellipsens vertex. Om vi tittar på specialfallet då M sammanfaller med A inser vi att $p+q=2a$ av symmetriskäl. Lillaxeln eller konjugataxeln är den kortaste linje som kan gå genom O, lillaxeln är därför mittpunktsnormal till FF', vi ger lillaxeln längden $2b$, och kallar ändpunkterna B och B'. Vi ger sträckan FF', fokaldistansen, längden $2c$.

Om vi nu betraktar specialfallet då M sammanfaller med B fås

$p=q=a$ och enligt Pytagoras sats

$$(1) \quad a^2=c^2+b^2 \text{ (och alltså även } b^2=a^2-c^2, \quad c^2=a^2-b^2)$$

Alltså kan vi en ellips' alla egenskaper om två av dessa tre sträckor är kända.

Vi inför ett koordinatsystem.

För att få en lätthanterlig och algebraisk form krävs ett koordinatsystem. Vi kan till exempel införa en x-axel som den räta linje som skär brännpunkterna. Till y-axel kan vi ta brännpunkternas mittpunktsnormal.

Vi får med Pytagoras sats:

$$(2) \quad p^2 = (x+c)^2 + y^2 \text{ och}$$

$$(3) \quad q^2 = (x-c)^2 + y^2$$

Vi subtraherar och får:

$$p^2 - q^2 = 4cx, \text{ men } (p+q)(p-q) = p^2 - q^2, \text{ och } p+q=2a \text{ alltså får vi } (p-q)=2cx/a$$

Vi döper $c/a=e$, e (excentricitet). Vi inser att för en ellips så är e större än noll, men mindre än ett då brännpunkterna ligger närmare origo än vertex. Men då e går mot noll blir vår ellips mer och mer lik en cirkel och då brännpunkterna sammanfaller har vi en cirkel (se definition ovan). Om e går mot ett kommer c att närma sig a , och BB'/AA' går mot noll, vår ellips blir mer och mer platt, till slut sammanfaller B och B' , vi har bara ett streck.

alltså: $p+q=2a$, $p-q=2ex$, vi adderar och subtraherar och får

$$(4) \quad p = a + ex$$

$$(5) \quad q = a - ex, \text{ med (2) och (3) får vi.}$$

fås $p^2 + q^2 = (x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2c^2$ och med (4) och (5)

$$p^2 + q^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 \text{ alltså}$$

$$x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + c^2 x^2 / a^2 \text{ vi förlänger med } a^2 \text{ och förenklar}$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2) \text{ men enligt (1) är } b^2 = a^2 - c^2 \text{ och vi}$$

får

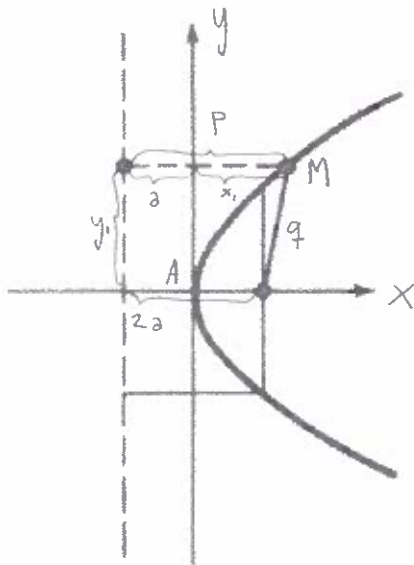
$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ vi dividerar med } a^2 b^2 \text{ och får}$$

$$(6) \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

Detta är tydligen ekvationen för en ellips, inte svår att arbeta med.

5.2 Parabelns ekvation

Parabelns definition: En parabel är den geometriska orten för punkter vars avstånd till en given punkt (brännpunkten) och en given rät linje (styrlinjen) har en konstant summa.



Vi inför ett koordinatsystem där x-axeln är vinkelrät till styrlinjen och skär brännpunkten F. Y-axeln sätts som mittpunktsnormal till F och parabelns vertex, som vi kallar A. Som tidigare kallar vi en godtycklig punkt på kurvan M. Vi skulle, som vi gjorde med ellipsen kunna kalla de två avstånden i fråga för p och q . Då kan vi kalla sträckan mellan styrlinjen och M p , och avståndet FM q . Vidare kallar vi avståndet AF för a , då blir avståndet mellan vertex och styrlinjen $2a$, och vi får:

$$p = (x+a)$$

$$q^2 = (x-a)^2 + y^2 \text{ från definitionen inses att } p=q, \text{ vi får då:}$$

$$(x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2 \text{ efter förenkling löser vi ut } y^2 \text{ och får}$$

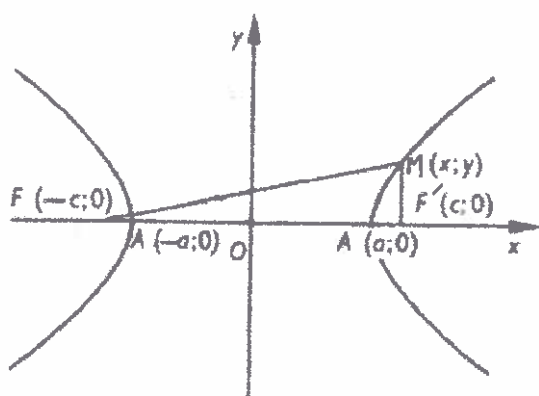
$$(7) \quad y^2 = 4ax$$

Tydligt kan parabeln helt enkelt beskrivas som en andragsgradsfunktion.

Då parabelns excentricitet inte är lika lätt att bestämma väntar vi till kapitel 7 med att bestämma den.

5.3 Hyperbelns ekvation

Hyperbelns definition: en hyperbel är den geometriska orten för punkter vars avstånd till två givna punkter (brännpunkterna) har en differens som är konstant.



Om vi döper brännpunkterna för F och F'. Vi ger avståndet mellan F och F' värdet $2c$. Vi inför ett koordinatsystem, med x-axeln så att den går igenom F och F', och en y-axel så att den blir mittpunktsnormal till FF'. En godtycklig punkt på kurvan kallar vi M. Hyperbelns vertex döper vi A och A', vi ger sträckan AA' värdet $2a$. Vi tänker oss nu sträckan en "imaginär axel" längs y med

värdet $2b$ så att b är modulen av det irrelle talet som fås för $b = (a^2 - c^2)$, c är ju större än a . Som tidigare döper vi FM till p och F'M till q .

Tittar vi på excentriciteten inser vi att den måste vara större än ett då brännpunkterna ligger längre från origo än vertex.

Betraktar vi specialfallen då M sammanfaller med A eller A' inser vi att:

(8) $p - q = 2a$ och enligt pythagoras' sats fås:

$$p^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$$q^2 = (x-c)^2 + y^2 \text{ detta i kombination med (8) ger}$$

(9) $((x+c)^2 + y^2) - ((x-c)^2 + y^2) = 2a$ vi flyttar över ena roten och kvaderar

$$4xc = 4a^2 \quad 4a((x-c) + y^2) \text{ till slut får vi}$$

(10) $(cx - a^2)/a = ((x-c)^2 + y^2)$ vi inser att tecknen i (9) och (10) hör ihop och vi får efter kvadrering

$$(cx/a - a)^2 = (x-c)^2 + y^2 \text{ vi beräknar, förenklar och får:}$$

$$c^2x^2/a^2 + a^2 = x^2 + c^2 + y^2 \text{ vi förlänger med } a^2 \text{ överallt}$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \text{ vi flyttar över } a^2x^2 \text{ till}$$

vänsterledet och bryter ut x^2 och a^2 och får:

$x^2(c^2-a^2)-y^2a^2=a^2(c^2-a^2)$, $b^2=c^2-a^2$ ty samma absolutvärde
 som a^2-c^2
 $x^2b^2-y^2a^2=a^2b^2$, vi dividerar med a^2b^2 och får
 (11) $x^2/a^2-y^2/b^2=1$

Denna ekvation påminner mycket om ellipsens ekvation, (6).

5.4 Sammanfattning

Vi har funnit tre ekvationer för våra tre kägelsnitt:

- (6) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ för ellipsen
- (7) $y^2=4ax$ för parabeln och
- (11) $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ för hyperbeln.

6 Mer om kägelsnitten: tangenter och specialfall.

6.1 Ellipsens tangent

Vi använder samma koordinatsystem som för ekvationen, (6), och söker tangentens ekvation på formen $y=kx+m$. Vi gör ett ekvationssystem:

$$(6) \quad \begin{cases} x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$$

(12) $y=kx+m$ vi insätter (12) i (6) och eliminerar y och får:

$$x^2/a^2 + (kx+m)^2/b^2 = 1 \text{ vi utvecklar}$$

$x^2/a^2 + (k^2x^2 + 2kmx + m^2)/b^2 = 1$ vi förlänger med a^2b^2 och sätter på formen $x^2 + px + q = 0$ och får:

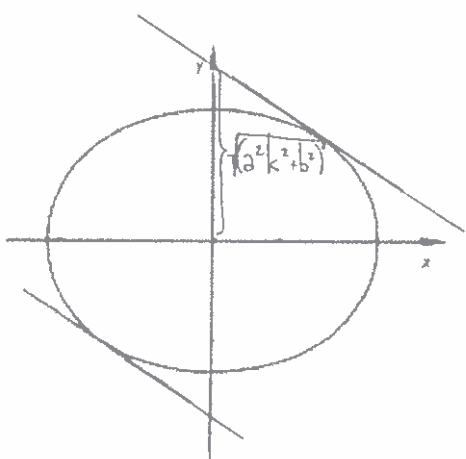
$$x^2(b^2 + a^2k^2) + x(2a^2km) + a^2(m^2 - b^2) = 0 \text{ och till slut}$$

$$x^2 + x(2a^2km)/(b^2 + a^2k^2) + a^2(m^2 - b^2)/(b^2 + a^2k^2) = 0 \text{ och } x \text{ blir:}$$

$$x_{1,2} = -a^2km/(b^2 + a^2k^2) \pm \sqrt{(a^4k^2m^2/(b^2 + a^2k^2)^2 - a^2(m^2 - b^2)/(b^2 + a^2k^2))}$$

eller

$$(13) \quad x_{1,2} = -a^2km/(b^2 + a^2k^2) \pm \sqrt{(a^4k^2m^2 - a^2(m^2 - b^2)(b^2 + a^2k^2))/(b^2 + a^2k^2)^2}$$



Men om vi tittar på vad vi har tagit fram så förstår vi att detta är x -värdena för skärningspunkterna mellan linjen (tangenten) och ellipsen, men då tangenten bara kan ha en "skärningspunkt" med ellipsen, måste diskriminanten (uttrycket under rottecknet) vara lika med noll. Vi gör en ny ekvation och sätter täljaren i diskriminanten i (13) lika med noll. Om löser detta i avseende på m , så får vi m -värdet (14). Vi ser efter vad vi får.

$$a^4k^2m^2 - a^2(m^2 - b^2)(b^2 + a^2k^2) = 0 \text{ vi utvecklar}$$

$$a^4k^2m^2 - a^2(m^2(b^2 + a^2k^2) - b^2(b^2 + a^2k^2)) = 0 \text{ vi sätter in } a^2$$

$$a^4k^2m^2 - a^2m^2(b^2 + a^2k^2) + a^2b^2(b^2 + a^2k^2) = 0 \text{ vi förkortar med } a^4k^2 \text{ överallt}$$

$$m^2 - m^2(b^2 + a^2k^2)/a^2k^2 + b^2(b^2 + a^2k^2)/a^2k^2 = 0 \text{ vi bryter ut } m^2 \text{ och utvecklar}$$

$$m^2(1 - (b^2 + a^2k^2)/a^2k^2) + (a^2b^2k^2 + b^4)/a^2k^2 = 0$$

$$m^2(1 - 1 - b^2/a^2k^2) + b^2 + b^4/a^2k^2 = 0$$

$m^2(-b^2/a^2k^2) = -b^2 - b^4/a^2k^2$ vi löser ut m^2 och får efter förenkling

$m^2 = b^2 + a^2k^2$ och
 (14) $m = \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ vi har alltså fått m i funktion av k , a och b , vi sätter in m i (12) och får ekvationen för tangenten till en ellips:

(12) $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ det dubbla tecknet framför roten är för att tangenten kan gå "ovanför" eller "under" ellipsen i koordinatsystemet

6.2 Parabelns tangent

Vi minns parabelns ekvation, (7), och på samma sätt som för ellipsen gör vi ett ekvationssystem för att finna tangenten på formen $y = kx + m$

$$(7) \quad \begin{cases} y^2 = 4ax \\ y = kx + m \end{cases}$$

(15) $y = kx + m$ efter insättning av (15) i (7) fås:

$$4ax = k^2x^2 + 2kxm + m^2 \text{ vi sätter detta på formen } x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + x(2km - 4a)/k^2 + m^2/k^2 = 0$$

$x_{1,2} = -(km - 2a)/k^2 \pm \sqrt{(km - 2a)^2/k^4 - k^2m^2/k^4}$ vi sätter diskriminanten = 0

$$(k^2m^2 - 4akm + 4a^2 - k^2m^2)/k^2 = 0 \text{ vi förenklar}$$

$$4a^2 = 4akm \text{ vi löser ut } m$$

$m = a/k$ precis som för ellipsen fås m i funktion av a och k och tangentekvationen (15) blir då

$$(15) \quad y = kx + a/k$$

6.3 Hyperbelns tangent

Ekvationen för en hyperbel (11) är väldigt lik ellipsens ekvation (6).

$$(6) \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

$$(11) \quad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

Vi kan alltså göra på samma sätt som för ellipsen när vi söker tangenten, och vi får då fram en ekvation:

(16) $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}$ som vi kan jämföra med ellipsens tangentekvation, (12):

(12) $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ enbart tecknet framför b^2 -termen i rotuttrycket skiljer dem åt.

6.4 Hyperbelns asymptoter

Om vi i hyperbelns ekvation löser ut y^2 -termen får vi:

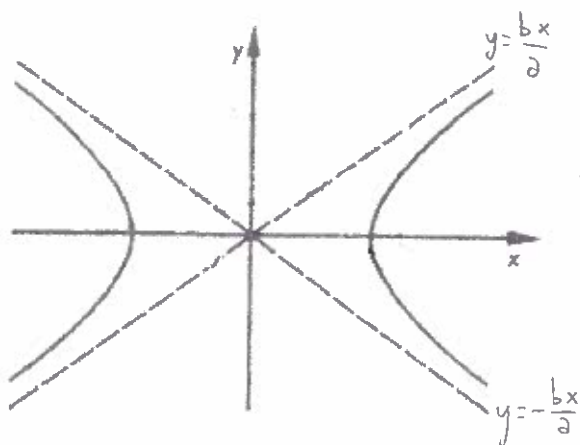
$y^2 = b^2x^2/a^2 - b^2$ om vi nu bryter ut b^2x^2/a^2 får vi

$y^2 = (b^2x^2/a^2)(1 - a^2/x^2)$ vi drar roten ur

$y = \pm (bx/a)\sqrt{(1 - a^2/x^2)}$ om nu x går mot oändligheten fås:

$a^2/x^2 = 0$ och

(17) $y = \pm bx/a$ för x -värden nära oändligheten,



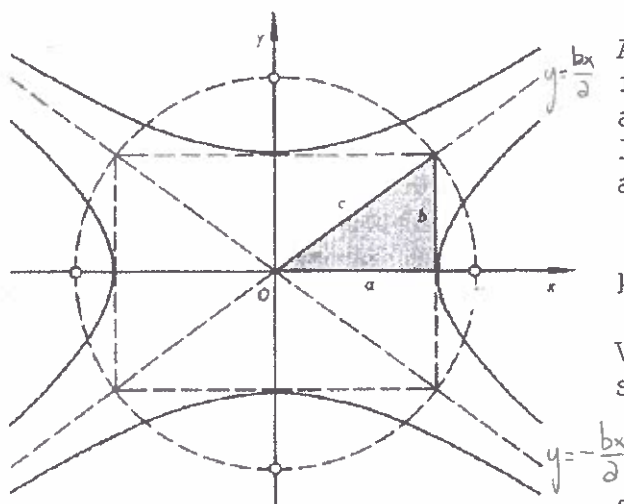
Men vi inser att $bx/a > y$ då x inte är oändligt stor, alltså finns det två asymptoter, (17), som hyperbeln går mot för stora x , men håller sig innanför.

6.5 Konjugathyperbeln

Om vi tänker oss en hyperbel på normalform ($x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$) och gör en ny hyperbel som går längs y -axeln, och där storaxeln har samma längd som den förstas imaginära axel, och den imaginära axeln blir storaxel. Vi minns i kapitlet om hyperbelns ekvation att den imaginära axeln har värdet $2b$. Två sådana hyperblar kallas konjugathyperblar och ekvationen för konjugathyperbeln blir:

$y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ (vi bytte x mot y och bytte plats på a och b) eller:

(18) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$ om vi bryter ut -1 från båda leden och förkortar bort.



Asymptoterna för denna hyperbel kan finnas genom att vi löser de i avseende på y och som tidigare låter x gå mot oändligheten, asymptoterna blir då:

$y = \pm xb/a$ samma för båda konjugathyperblarna alltså.

Vi inser att båda hyperblarna har samma c -värde då $a^2 + b^2 = c^2$ för

hyperblar, och b och a byter bara plats i uträkningen. Men om a inte är lika med b fås att excentriciteterna är olika, konjugathyperblarna är alltså inte nödvändigtvis likformiga.

6.6 Sammanfattning

De tre tangentekvationerna är:

(12) $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ för ellipsen

(15) $y = kx + a/k$ för parabeln och

(16) $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}$ för hyperbeln

För en hyperbel på formen $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ fås

(17) $y = \pm bx/a$ för asymptoterna och

(18) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$ för konjugathyperbeln

7 Angående oändligheten och kägelsnitten.

Vi ska nu titta på parabeln och hur den ser ut i den ände som vätter mot oändligheten. Vi minns formeln för parabelns tangentekvation:

$$(15) \quad y=kx+a/k$$

Denna formel tillåter alla k -värden, utom $k=0$. Vi undersöker vad som händer då k går mot noll. Men först en titt på parabelns ekvation.

$$(7) \quad x=y^2/4a$$

(7) antyder att x är växande då y är det, och vice versa. Men om k går mot noll, går termen a/k i (15) mot oändligheten, och y blir oändligt stor, vilket betyder att även x är oändligt stor, detta betyder alltså att parabeln har tangenter som är parallella med x -axeln då x går mot oändligheten. Parabeln skulle alltså kunna liknas med en halv ellips som är oändligt stor.

Vi går tillbaka till kapitel 4 och tittar på hur planet förs in i konen. Om snittkurvan först är en ellips och planet vrids så att det nästan skär fram en parabel. Om planet istället hade skurit ut en parabel hade endast en oändligt liten skillnad i vinkeln behövts...

Efter detta kanske vi vill jämföra dessa kägelsnitt litet mer med varandra, vi skulle då kunna göra på följande sätt: Vi modifierar deras ekvation så att deras vertex hamnar i origo och låter kurvan växa mot de positiva x -värdena och jämför.

För ellipsen,

$$(6) \quad x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

har det vertex som vetter åt de negativa x -värdena koordinaterna $(0;-a)$, vi kompenserar för detta genom att parallellförflytta koordinatsystemet i x -led a enheter i negativ riktning. Då måste vi ersätta alla x -värden med $x-a$, för att räkna med det "riktiga" (ursprungliga) x -värdet i ekvationen. Ekvationen blir då:

$$(x-a)^2/a^2+y^2/b^2=1$$

Om vi löser denna ekvation i avseende på y^2 får vi:

$$y^2=b^2-b^2(x-a)^2/a^2 \text{ vi förenklar} \\ y^2=2b^2x/a-b^2x^2/a^2$$

Vi ska nu införa excentriciteten i ekvationen. Detta kan tyckas meningslös till en början, men det ska visa sig att vi då får

intressanta resultat. Vi börjar med att i x^2 -termen ersätta b^2 med $c^2 - a^2$.

$$(19) \quad y^2 = 2b^2x/a - (c^2 - a^2)x^2/a^2 \text{ men } c/a = e \text{ och vi får}$$

$$y^2 = 2b^2x/a - (e^2 - 1)x^2$$

För hyperbeln

$$(11) \quad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

har det vertex som pekar mot negativa x-axeln koordinaterna $(-a; 0)$, vi ersätter därför x med $(x+a)$ och får efter samma steg som för ellipsen:

$$(20) \quad y^2 = 2b^2x/a + (e^2 - 1)x^2$$

För parabeln

$$(7) \quad y^2 = 4ax$$

ligger redan vertex i origo.

Jämför vi nu dessa kägelsnittsekvationer

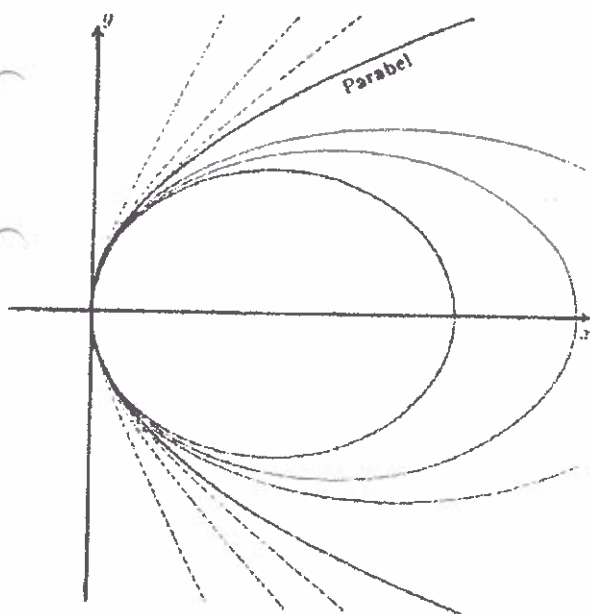
$$(19) \quad y^2 = 2b^2x/a - (e^2 - 1)x^2 \text{ för ellipsen}$$

$$(20) \quad y^2 = 2b^2x/a + (e^2 - 1)x^2 \text{ för hyperbeln och}$$

$$(7) \quad y^2 = 4ax \text{ för parabeln}$$

kan vi skriva dem på formen

$$y^2 = gx + hx^2$$



där g alltid är positiv, och h för ellipsen har negativ tecken framför sig (e för ellipsen ligger mellan 0 och 1), för hyperbeln positivt (e för hyperbeln är större än 1), och för parabeln är h lika med noll. Alltså får vi att excentriciteten är lika med ett. Men detta verkar paradoxalt, skulle inte då brännpunkten sammanfalla med vertex? Avstånden a och c skulle ju då vara lika.

Men om vi tänker oss en ellips, som vanligt med storaxelns längd $2a$ och med fokaldistansen $2c$, dessutom ger vi c' ett värde så att $a = c + c'$. Då fås

$$e = c/a \text{ men } c = a - c'$$

$$e = (a - c')/a$$

$$(21) \quad e = 1 - c'/a$$

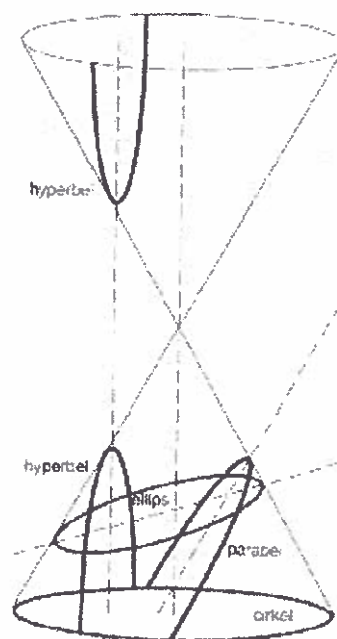
Vi tänker oss nu planet vi skär konen med, om planet skär ut en ellips, men närmar sig en parabel blir ju storaxeln större och större. Alltså, $2a$ går mot oändligheten, och således också a . (21) ger när a går mot oändligheten $e=1$.

Om vi tänker istället tänker oss en hyperbel med fokaldistansen $2c$, avståndet mellan vertex $2a$, och c' så att $c-c'=a$, vi inser att c' måste ha negativt tecken framför sig så c är större än a . Om vi byter ut c mot $a+c'$ analogt med det vi gjorde nyss fås till slut:

$$e=1+c'/a$$

Om vi nu låter den ena hyperbelhalvan flytta sig mot oändligheten (det skärande planet går mot att bli parallell med en generatris) får vi att a går mot oändligheten och alltså $e=1$.

Alltså skulle man kunna säga att parabeln är specialfallet inom kägelsnitten som skiljer två stora grupper. Som talet 0...



8 SLUTORD

Jag har alltså i detta specialarbete visat att parabeln är en halv ellips, och att hyperbeln i oändligheten fortfarande växer, något jag gått och grubblat på nästan ett år. Men under arbetets gång visade det sig att jag var tvungen att söka upp litteratur från 40-talet för att hitta härledningar till kägelsnittens definitioner, något som förvånade mig.

Slutligen vill jag tacka lektor Bengt Diehl för lånet av litteratur och de tips och råd han gett mig; tack till P3, Front242, And One, Nick Cave and the Bad Seeds, the Sisters of Mercy, Kraftwerk, Page och Depeche Mode för den rogivande bakgrundsmusiken; ett tack också till mina föräldrar för kaffe och mat, mest för kaffet; och ett stort tack till Carin Thorén, min handledare, som hjälpt mig med korrektur och handledning av detta arbete.

9 KÄLLHÄNVISNING (i kronologisk ordning)

- * J.S Hedström och C. Rendahl, Funktionslära och analytisk geometri, Albert Bonniers boktryckerier, Stockholm, 1945
- * Egmont Colerus, Från punkten till fjärde dimensionen, Natur och Kultur, Stockholm, 1955
- * Fredrik Ehrnst, Matematik för reallinjens matematiska gren RII^3 - RIII^3 och RIII^4 - RIV^4 , Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1964
- * Wilhelm Jörgensen, Tekno's stora räkneboken 2, Teknografiska institutet, Stockholm, 1968
- * Bertil Nyman och Göran Emanuelsson, NT2 matematik för gymnasieskola, Läromedelsförlagen, Stockholm, 1972
- * Ann-Marie Lund(huvudredaktör), Media data, Bonnier Fakta Bokförlag AB, Stockholm, 1983
- * Iain Nicolson och Patrick Moore, Vetenskapens värld Solsystemet, Fogtdals Förlag, Malmö, 1987
- * Kristin Dahl, Den fantastiska matematiken, T. Fischer & Co, Jugoslavien, 1991
- * Peter Nilson, Rymdväktaren, Norstedts förlag AB, Stockholm, 1995
- * Gunilla Malmström, 1998, Gymnasiets NT-elever medelmåttor i matte, Ny teknik, nummer 10 1998, sida 10